

Proposal for a doctoral thesis

Couplage à l'aide du transport optimal dans le cadre des ordres stochastiques

French (for English, see p. 2)

Titre. Couplage à l'aide du transport optimal dans le cadre des ordres stochastiques

Directeur de thèse. Nicolas Juillet – nicolas.juillet@uha.fr

Période. Début entre janvier et septembre 2025. Financement de 3 ans.

Unité d'Accueil. Département de Mathématiques de l'IRIMAS

Établissement de rattachement. Université de Haute Alsace (campus de Mulhouse)

Rattachement à un programme. Projet SOCOT "Ordres stochastiques et Transport optimal contraint" financé par l'ANR (2023-28). Implication dans les tâches 2, 3, 4 et 5.

Collaborations. Opportunités de cotutelle avec certains pays européens

La construction de processus stochastiques ou plus généralement de variables aléatoires définies sur un même espace est une thématique fondamentale des probabilités qui a traversé les périodes et les sous-domaines pour resurgir régulièrement dans des contextes différents. On la retrouve spécifiquement dans certains problèmes classiques tels que celui des faux mouvements browniens (les « fake Brownian Motions ») ou dans celui des plongements de Skorokhod pour lesquels des solutions variées dans leur conception et leurs méthodes existent. On peut également citer le problème des peacocks (PCOC : Processus Croissant pour l'Ordre Convexe) [MaYo02, HiPrRoYo11] qui étend celui du faux mouvement brownien, ou encore le contre-exemple trouvé à la conjecture Cantelli [KIKu15] en application du problème de Skorokhod.

Ces problèmes partagent pour objectif celui de construire des processus stochastiques satisfaisant certaines contraintes et interpolant exactement une famille de marges prescrites. A la gamme des approches les plus courantes (contrôle optimal stochastique, théorie du potentiel, couplage, etc.) est récemment venu s'ajouter un nouveau point de vue inspiré de la théorie du transport optimal. Il s'est notamment illustré dans l'article de Beiglböck, Cox et Huesmann [BeCoHu17] ou dans [BeJu16, BrHuJu22]. Le champ des découvertes à venir reste vaste. Il s'agira d'explorer de nouvelles contraintes pour ces problèmes, en particulier des contraintes liées aux ordres stochastiques, et, dans le meilleur des cas, d'obtenir une théorie englobante. Ainsi les extensions du théorème de Kellerer [Ke72] et plus généralement la très délicate construction de processus markovien font partie des caps donnés à cette thèse et plus généralement au projet SOCOT. D'autres propriétés stochastiques telles que la propriété de représentation prévisible, dans la lignée de [BrHuJu22] ou la construction de martingales déterministes dans le sens rétrograde (en lien avec la notion de "backward Brenier map" apparaissant dans [NuWaZh22]) constituent également des objectifs. Enfin, dans un cadre plus géométrique, on envisagera le problème des plongements höldériens de l'espace de Wasserstein dans des espaces L^p via la construction de variables aléatoires associées, [DeMe22+].

La première année de la thèse pourra s'inscrire dans la continuité d'un stage de master qui serait financé par le projet SOCOT. Il s'agira dans un premier temps de se familiariser avec les problèmes

sus-mentionnés, de compléter son bagage théorique et technique en reproduisant certaines démonstrations, parfois en déplaçant un peu le cadre, ou en donnant des exposés à l’occasion d’un groupe de travail. En deuxième partie de la première année on décidera du problème à attaquer prioritairement. On prévoit de s’appuyer sur l’arsenal des techniques modernes du transport optimal, notamment le transport entropique ou le transport faible ainsi que sur les propriétés des ordres stochastiques. Il est attendu que les premiers résultats arrivent au cours de la deuxième année. L’apprentissage de la rédaction d’articles, initié en première année, sera continué avec pour objectif la publication d’articles scientifiques originaux. La troisième année sera consacrée à la rédaction du mémoire de thèse, avec en parallèle la continuation des recherches et la dissémination des résultats. La thèse qui se fera au sein du département mathématiques de l’IRIMAS pourra inclure des missions d’enseignement et de médiation scientifique. La participation et le financement par le projet SOCOT permettra des échanges avec une équipe pluraliste de mathématiciennes et mathématiciens provenant du Grand Est, de la région parisienne et de laboratoires du sud de la France.

English

Titre. Coupling via optimal transport in the framework of stochastic orders

Supervisor. Nicolas Juillet – nicolas.juillet@uha.fr

Period. Start in January-September 2025, three years grant

Research unit. Department of mathematics of the IRIMAS

University. University of Upper Alsace (campus of Mulhouse)

Connexion to a program. Projet SOCOT “Stochastic Orders and Constrained Optimal Transport”. Grant of the ANR (2023-28). Implication in tasks 2, 3, 4 et 5.

Collaborations Opportunities for *Cotutelle* with some European countries

The construction of stochastic processes, or more generally of random variables defined on the same space, is a fundamental theme in probability that has crossed periods and sub-fields to resurface regularly in different contexts. It can be found specifically in certain classic problems such as fake Brownian motions or Skorokhod embeddings, for which a variety of solutions exist in terms of design and methods. Other examples include the peacock problem (PCOC : Processus Croissant pour l’Ordre Convexe) [MaYo02, HiPrRoYo11], which extends the fake Brownian motion problem, and the counterexample to the Cantelli conjecture [KlKu15] in application of the Skorokhod problem.

These problems share the objective of constructing stochastic processes that satisfy particular constraints and interpolate exactly a family of prescribed marginals. To the range of the most common approaches (stochastic optimal control, potential theory, coupling, etc.) has recently been added a new point of view inspired by optimal transport theory. This is illustrated in Beiglböck, Cox and Huesmann’s paper [BeCoHu17] or in [BeJu16, BrHuJu22]. The field of future discoveries remains vast. The aim will be to explore new constraints for these problems, in particular constraints related to stochastic orders, and, in the best case, to obtain an encompassing theory. Thus, extensions of Kellerer’s theorem [Ke72] and, more generally, the very delicate construction of Markovian processes are part of the focus of this thesis and, more generally, of the SOCOT project. Other stochastic properties such as the predictable representation property, in the tradition of [BrHuJu22], or the construction of deterministic martingales in the backward direction (in connection with the notion of “backward Brenier map” appearing in [NuWaZh22]) are also objectives. Finally, in a more geometrical framework, we’ll consider the problem of Hölderian embeddings of Wasserstein space into L^p spaces via the construction of associated random variables, [DeMe22+].

The first year of the thesis could be a continuation of a master thesis also funded by the SOCOT project. Initially, the aim will be to familiarize oneself with the above-mentioned problems, and to complete one’s theoretical and technical background by reproducing some demonstrations, sometimes shifting the framework a little, or by giving presentations as part of a working group. In the second half

of the first year, we'll decide which problem to tackle first. We plan to draw on the arsenal of modern optimal transport techniques, in particular entropic and weak transport, as well as on the properties of stochastic orders. First results are expected in the second year. Learning to write articles, initiated in the first year, will be continued, with the aim of publishing original scientific papers. The third year will be devoted to writing the thesis, while continuing research and disseminating results. The thesis, which will be carried out within the IRIMAS mathematics department, may include teaching and scientific mediation assignments. Participation in and funding by the SOCOT project will enable exchanges with a pluralistic team of mathematicians from the Grand Est, the Paris region and laboratories in the south of France.

References

- [**BeCoHu17**] M. Beiglböck, A. Cox and M. Huesmann. Optimal transport and Skorokhod embedding *Invent. Math.* 2017, 208, 327-400. 1, 2
- [**BeJu16**] M. Beiglböck and N. Juillet. On a problem of optimal transport under marginal martingale constraints. *Ann. Probab.* 44(1), 2016. 1, 2
- [**BrHuJu22**] M. Brücknerhoff, N. Juillet and M. Huesmann. Shadow martingales – a stochastic mass transport approach to the peacock problem. *Elec. J. Probab.*, Paper No. 125, 2022. 1, 2
- [**DeMe22+**] A. Delalande and Q. Mérigot. Quantitative Stability of Optimal Transport Maps under Variations of the Target Measure. *Duke J. Math.* (to appear) 1, 2
- [**HiPrRoYo11**] F. Hirsch, C. Profeta, B. Roynette and M. Yor. Peacocks and associated martingales, with explicit constructions. *Bocconi & Springer Series* 3. (2011). 1, 2
- [**Ke72**] H. Kellerer Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale. *Math. Ann.* 198, 99–122 (1972). 1, 2
- [**KIKu15**] V. Kleptsyn and A. Kurtzmann. A counterexample to the Cantelli conjecture through the Skorokhod embedding problem. *Ann. Probab.*, 43(5) :2250–2281, 2015. 1, 2
- [**MaYo02**] P. Madan and M. Yor. Making Markov martingales meet marginals : With explicit constructions. *Bernoulli*. 8, No. 4, 509-536 (2002). 1, 2
- [**NuWaZh22**] M. Nutz, R. Wang and Zhenyuan Zhang. Martingale Transports and Monge Maps. *ArXiv e-print* 2022. 1, 2